شروین ایران عقیده

نام استاد:
ابوالفضل تهرانیان

نام درس:

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

قضیه ۷ و ۸ فصل دوم

یکشنبه ۱۰:۱۵

- **قضیه ۷.** فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیات F باشد، و B و $\acute{B}$ دو پایه مرتب برای V باشند. آنگاه یک ماتریس $n \times n$ یکتا و لزوما معکوس‌پذیر مانند P که درایه‌هایش در F هستند وجود دارد به طوری‌که به ازای هر بردار α در V

$$[\alpha]_B = P[\alpha]_{\acute{B}} \qquad (۱)$$

$$[\alpha]_{\acute{B}} = P^{-1}[\alpha]_B \qquad (۲)$$

- **اثبات:** $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ و $\acute{B}=\{\acute{\alpha}_1,\ldots,\acute{\alpha}_n\}$

B و $\acute{B}$ دو پایه مرتب برای V هستند در این صورت اسکالرهای یکتایی مثل P_{ij} وجود دارند که:

$$\acute{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i \quad , \quad 1 \le j \le n$$

اگر $\acute{x}_1,\ldots,\acute{x}_n$ مختصات بردار α نسبت به $\acute{B}$ باشد داریم:

$$\alpha = \acute{x}_1 \acute{\alpha}_1 + \ldots + \acute{x}_n \acute{\alpha}_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \acute{x}_j \acute{\alpha}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \acute{x}_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \alpha_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (p_{ij} \acute{x}_j)\, \alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} \acute{x}_j)\, \alpha_i \qquad , \qquad (\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i)$$

چون مختصات α در پایه B یکتا است پس:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \acute{x}_j \quad \rightarrow \quad [\alpha]_B = P\,[\alpha]_{\acute{B}}$$

چون B و $\acute{B}$ مستقل خطی هستند پس $[\alpha]_B = 0$ اگر و تنها اگر $[\alpha]_{\acute{B}} = 0$ پس طبق قضیه ۷ فصل ۱ P هم ارز مـاتریس همـانی $n \times n$ است پس معکوس پذیر است پس:

$$[\alpha]_{\acute{B}} = P^{-1}[\alpha]_B$$

- **قضیه ۸.** فرض کنیم P ماتریسی معکوس‌پذیر و $n \times n$ بر روی هیات F، V یک فضای برداری n بعدی بر روی F، و B پایه‌-ای مرتب برای V باشد. در این صورت، پایه مرتب یکتایی چون $\acute{B}$ برای V وجود دارد که به ازای هر بردار α در V

$$[\alpha]_B = P[\alpha]_{\acute{B}} \qquad (۱)$$

$$[\alpha]_{\acute{B}} = P^{-1}[\alpha]_B \qquad (۲)$$

- **اثبات:** اگر B متشکل از بردارهای $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ باشد و $\acute{B}=\{\acute{\alpha}_1,\ldots,\acute{\alpha}_n\}$ پایه مرتبی برای V و در مورد آن (۱) درست باشد واضح است که:

$$\acute{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$$

پس کافی است نشان دهیم که بردارهای $\acute{\alpha}_j$ که با این معادلات تعریف می‌شوند، تشکیل یک پایه می‌دهند.

فرض کنیم $Q = P^{-1}$ در این صورت:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_j Q_{jk}\,\acute{\alpha}_j &= \textstyle\sum_j Q_{jk}\sum_i p_{ij}\alpha_i \\ &= \textstyle\sum_j\sum_i p_{ij}Q_{jk}\alpha_i \\ &= \textstyle\sum_i\left(\sum_j p_{ij}Q_{jk}\right)\alpha_i \\ &= \alpha_k\end{aligned}$$

پس زیرفضای پدید آمده توسط مجموعه $\acute{B}$ شامل B و نتیجتا مساوی با V است.

پس $\acute{B}$ یک پایه است و بنابر تعریف پایه و قضیه ۷ واضح است که (۱) معتبر و در نتیجه چون p وارون پذیر است (۲) نیز معتبر می‌باشد.